System-Modellierung über Veränderungsgrößen mit Fluxion

Stephan Lück

1. Einleitung

Will man Entwicklungen von physikalischen oder nichtphysikalischen Vorgängen modellieren, so ist die Veränderung einer abhängigen Größe, die sich aus der Veränderung einer Einflussgröße ergibt, von zentraler Bedeutung. Üblicherweise werden solche Systeme mathematisch mittels der Ableitung 1. oder höherer Ordnung einer gesuchten Größe von den Einflussgrößen über Differentialgleichungen (DGL) modelliert. Die Mannigfaltigkeit der so behandelbaren Systeme ist immens und sogar die Zahl der Probleme, die sich auf ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung reduzieren lassen ist unüberschaubar groß und umfasst die meisten relevanten Bereiche der Physik oder anderer Wissenschaften, sodass wir uns ohne groß einzuschränken auf diese beschränken wollen.

In der Schule (insbesondere unterhalb der Oberstufe) kann man, da der Ableitungsbegriff noch nicht zur Verfügung steht, die beschriebene Modellierung eines Problems anschaulich über so genannte Veränderungsraten durchführen. Aus der Problemstellung ergibt sich die unabhängige Größe, sehr oft beispielsweise die Zeit, unter deren Ablauf sich die relevanten Größen des Systems verändern. Man modelliert nun, mit welcher Rate sich die Systemgrößen verändern. Eine Rate ist einfach die Veränderung einer Systemgröße pro Einheit der unabhängigen Größe.

Der Begriff der Rate lässt sich den Lernenden i. d. R. recht gut vermitteln, da sie bereits im Alltag (z. B. über Zinsen oder Spritverbrauch) mit dem Prinzip der Formulierung einer Veränderung pro Zeit-, Längeneinheit o.ä. in Berührung kommen. Da im Alltag oftmals andere Begriffe verwendet werden, muss man den Lernenden die neue Begrifflichkeit mit deren Erfahrung in Beziehung setzen. Dann entwickelt sich zumeist recht schnell eine gewisse Intuition für die Veränderungsraten, was die Modellierung erheblich erleichtert.

Modelliert man das zu betrachtende System in der mathematischen Form $Rate_n = f_n(\ldots)$, wobei die Punkte für alle möglichen System- und Einflussgrößen stehen, so entspricht dies einer Formulierung einer zur ersten Ableitung aufgelösten Differentialgleichung (s.o.). Systeme, die sich in dieser Weise beschreiben lassen, können sehr einfach mit dem im folgenden beschriebenen Programm „Fluxion“ [1] berechnet und analysiert werden. Vorteile und weitere didaktische Aspekte der mathematischen Modellierung in der Lehre sind in [2, 3, 4] beschrieben.

2. Das Programm Fluxion

Mit dem Programm Fluxion lassen sich über Ratengleichungen formulierte Systeme schnell und komfortabel berechnen. Es bietet eine intuitive Benutzeroberfläche für einen einfachen Zugang und stellt zugleich umfangreiche Funktionen bereit, die es erlauben, auch komplexere Probleme zu behandeln. Die Eingabe des mathematischen Modells erfolgt direkt über die Eingabe der Ratengleichung (bei vektoriellen Problemen komponentenweise) und der Anfangsbedingungen in den entsprechenden Eingabefeldern.

Über den Start-Button wird die Berechnung gemäß den Vorgaben gestartet und die Lösung bei nicht allzu umfangreichen Berechnungen instantan im rechts daneben befindlichen Diagramm angezeigt (siehe Abbildung 1). Die Berechnung erfolgt Schrittweise mit einer vorgegebenen Schrittweite, die man passend (also genügend klein, aber nicht zu klein) wählen sollte. Bei zu grober Schrittweite werden die Berechnungen ungenau, was bedeutet, dass die berechneten Werte immer weiter von der tatsächlichen Lösung abweichen. Zu kleine Schrittweiten bedingen einerseits eine unnötig lange Berechnungszeit wie auch einen unverhältnismäßig hohen Speicherbedarf. Zur Berechnung stehen verschiedene Berechnungsverfahren zur Verfügung, die in den Einstellungen ausgewählt werden können. Besonders bei unbekanntem Systemverhalten sollte man das Runge-Kutta-Verfahren mit Schrittweitensteuerung auswählen, da hier die Abfolge der Berechnungsschritte adaptiv angepasst wird, falls die Abweichungen zu groß werden. (Der etwas höhere Berechnungsaufwand tritt erst bei sehr aufwändigen und langen Berechnungen zu Tage.)

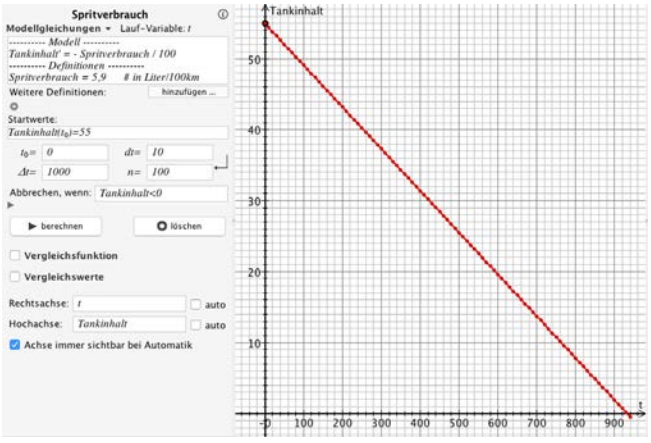


Abbildung 1: *Bildschirmfoto der Modellierung des Tankinhalts eines PKW bei konstantem Spritverbrauch mit Fluxion.*

Neben der Berechnung der numerischen Lösung der eingegebenen Modellierung des Systems bietet das Programm weitere Tools an, die es erlauben das Verhalten des Systems und die Güte der Modellierung im Vergleich zur Realität näher zu untersuchen. Für komplexere Systeme stehen ebenfalls Methoden zur Verfügung, wie zum Beispiel Bedingungen oder Tabellenfunktionen, um bekannte (gemessene) Realeinflüsse im Modell zu implementieren. Diese zusätzlichen Möglichkeiten sprengen allerdings den Rahmen dieses Artikels und können bei Bedarf auf der Webseite des Programms angebotenen Tutorial [5] nachgelesen werden.

Im folgenden Abschnitt soll nun die Vorgehensweise der Modellierung von Systemen mittels Veränderungsgrößen anhand von einfachen Beispielen aus verschiedenen Gebieten (Technik, Wirtschaft, Biologie, Physik) erläutert und so die Einsatzmöglichkeiten des Programms in der Lehre (Schule und untere Semester an Hochschulen) aufgezeigt werden. An einigen Stellen werden Hinweise zur Vertiefung oder Erweiterung der Modelle angeboten, deren ausführliche Behandlung den Rahmen dieses Artikels sprengen würden. Die im Artikel behandelten Fluxion-Dokumente können unter [6] heruntergeladen werden. Diese enthalten im Informationsfester weitere Erläuterungen und Variations- bzw. Vertiefungsvorschläge.

3. Beispiele

3.1 Spritverbrauch (Alltagsbeispiel zur Einführung)

Ein erstes sehr einfaches Beispiel, welches gut geeignet ist, um in das Konzept der Veränderungsgröße einzuführen, da es aus dem Alltag i.d.R. allen Schülern und Schülerinnen bekannt ist, befasst sich mit der Modellierung des Tankinhalts eines Autos bei einem bekannten Durchschnittsverbrauch in Liter pro 100 Kilometer. Also ist nach dem Tankinhalt nach einer bestimmten Zahl von gefahrenen Kilometern gesucht. Damit ist die Laufvariable festzulegen als Strecke s. Nun gilt es das Modell mit dem Konzept der Veränderungsrate aufzustellen.

Da der Motor Sprit aus dem Tank mit einer als konstant angenommenen Menge entnimmt, gilt für die Veränderungsrate (= Veränderung pro Strecke) des Tankinhalts: *Tankinhalt'* = - *Spritverbrauch*. Man beachte das Hochkomma, das angibt, dass es sich hier um die Veränderungsrate (Ableitung) handelt.

Zum vollständigen Modell fehlen nun noch die Anfangsbedingungen (z. B. Tankinhalt zu Beginn beträgt 55 Liter) und die Überlegung zu den Berechnungsschritten. Im angegebenen Beispiel wird die Laufvariable s in Kilometern von 0 bis 1000 km mit einer Schrittweite von 1 km berechnet, weshalb man auch den Spritverbrauch noch umrechnen muss, da er i.A. pro 100 km angegeben wird. Im Programm Fluxion kann dies nun exakt in dieser Form eingegeben werden (siehe Abbildung 1). Mit Definition der Achsenauftragung kann mit Klick auf den Knopf „berechnen“ die numerische Rechnung gestartet werden und man sieht das Ergebnis sofort im rechts dargestellten Diagramm. Man erkennt einen linearen abnehmenden Verlauf, was zusätzlich durch Einzeichnen einer linearen Vergleichsfunktion bestätigt werden kann. Eine konstante Veränderungsrate ergibt also einen linearen Verlauf der eigentlichen Größe - eine erste wichtige Erkenntnis.

3.2 Sparbuch (Alltagsbeispiel aus dem Bereich Wirtschaft und Finanzen)

In diesem Beispiel soll der Betrag eines Sparbuchguthabens über viele Jahre hinweg mit folgendem Szenario modelliert werden. Jemand steckt jeden Monat 10 € seines Taschengeldes in das Sparschwein und bringt den Inhalt jedes Jahr zur Bank, wo es mit einem gewissen festen Zinssatz verzinst angelegt wird. Das Modell ist wiederum recht intuitiv und einfach aufzustellen, wenn man sich überlegt, wie sich der Betrag auf dem Sparbuch im Laufe der Zeit (Laufvariable damit klar) verändert. Jedes Jahr kommt also das Geld aus dem Sparschwein und der Zinsbetrag hinzu. Demnach gilt für die Veränderungsgröße Guthabenänderung pro Jahr:

Guthaben' = *Sparschweininhalt* + *Zinsen.*

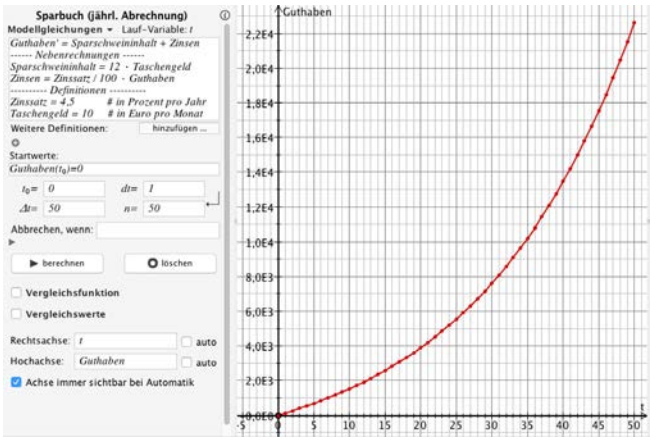


Abbildung 2: *Bildschirmfoto der Modellierung der Entwicklung eines Sparbuch-Betrags im Laufe der Zeit mit Fluxion*

Der Sparschweininhalt entspricht dem Zwölffachen des monatlichen Sparbetrags und die Zinsen berechnen sich aus dem Zinssatz und dem aktuellen Guthaben auf dem Sparbuch. Das vollständige Modell inklusive Berechnung über einen Zeitraum von 50 Jahren ist in Abbildung 2 dargestellt. Man erkennt sofort den Zinseszinseffekt (Nichtlinearität). Sehr hilfreich zum Verständnis ist das Verändern der Parameter des Modells (Zinssatz, Taschengeld) oder eine Variation, wie zum Beispiel eine monatliche Einzahlung mit monatlicher Verzinsung.

3.3 Radioaktive Zerfallsreihe (Beispiel aus der Physik)

Eine strukturell mathematisch ähnliche Modellierung, nämlich, dass die Veränderung linear abhängig von den aktuellen Größen

ist, findet sich bei vielen Wachstumsvorgängen in der Natur und ebenso auch bei Zerfallsprozessen. Als Beispiel soll hier die Modellierung einer (abgekürzten) radioaktiven Zerfallskette dargestellt werden.

Ein Ausgangselement zerfällt mit einer gewissen Halbwertszeit *TA* in ein Element *B*, das wiederum mit einer Halbwertszeit *TB* in ein stabiles Element *C* zerfällt. Modelliert werden soll der Anteil der Elemente, die in einer Probe zu einem Zeitpunkt t vorhanden ist (in Prozent).

Die Modellierung ergibt sich recht einfach, wenn man mit der Bedeutung der Veränderungsgrößen vertraut ist. Pro Zeiteinheit zerfällt ein gewisser Anteil der vorhandenen Atome dieses Elements. Demnach gilt:

$$NA' = -Anteil \cdot NA.$$

Der Anteil (in den Modellgleichungen der Abbildung 3 mit λA bezeichnet) ergibt sich aus dem Quotienten aus ln(2) und der Halbwertszeit TA. Analog überlegt man sich die Veränderungen von Element B und C. Pro Zeiteinheit erhöht sich der Anteil von Element B durch die zerfallenen Atome von Element A (daher hier positives Vorzeichen) und durch den Zerfall vermindert sich der Anteil wiederum ähnlich zu A jedoch mit einer anderen Zerfallskonstante λB. Element C ist stabil, also entfällt hier der abnehmende Anteil. In Abbildung 3 ist die Berechnung für eine Probe, die zu Beginn zu 100% aus Atomen des Elements A besteht, gezeigt.

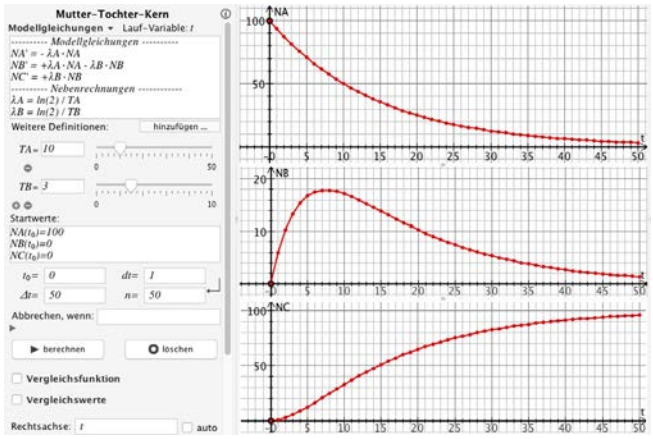


Abbildung 3: *Bildschirmfoto der Modellierung der Anteile der Substanzen in einer Probe bei einer radioaktiven Zerfallskette*

Um die Einflüsse der Halbwertszeiten auf das Ergebnis zu untersuchen, sind die Werte *TA* und *TB* als veränderbare Parameter durch Schieberegler definiert worden. Da durch das Einstellen des Parameters mit dem Schieberegler instantan die Berechnung neu erfolgt, lässt sich direkt ablesen, welche Einflüsse der jeweilige Parameter auf das Ergebnis der Modellierung hat. Man bekommt so eine gewisse Intuition für die Vorgänge, weshalb die Verwendung von Schieberegler sehr zu empfehlen ist.

3.4 Räuber-Beute Modellierung (Beispiel aus der Biologie)

In ähnlicher Weise lässt sich ein einfaches Räuber-Beute-Modell (nach Lotka und Volterra [7]) aus der Biologie aufstellen. Gegeben sind zwei Spezies (Beute B und Räuber R), deren Bestand mit einer jeweiligen Geburtenrate wächst und sich mit einer Sterberate vermindert. Dieses kann man analog zu Beispiel 3 im ersten Schritt in folgenden Ratengleichungen formulieren:

$$BAnz' = BGeburt - BSterb \quad und \quad RAnz' = RGeburt - RSterb,$$

wobei jeweils sich die Zu- und Abnahmen ebenfalls analog zu Beispiel 3 durch ‚Rate mal Bestand' berechnen (siehe Abbildung 4 im Modell unten).

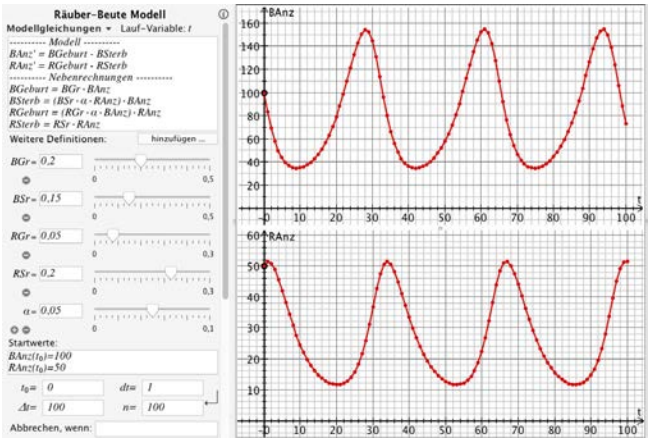


Abbildung 4: *Bildschirmfoto der Modellierung eines Räuber-Beute-Modells nach Lotka und Volterra mit Fluxion*

Gibt man dieses Vorabmodell in Fluxion ein und berechnet dessen Lösung, so findet man erwartungsgemäß, dass der Bestand konstant bleibt, wenn Geburten und Sterberaten der Spezies jeweils gleich sind, und sich ein exponentielles Wachstum ausprägt, wenn die Geburtenrate beispielsweise die Sterberate übersteigt.

Richtig interessant wird es nun, wenn man die beiden Spezies in Wechselwirkung treten lässt und damit die Gleichungen wechselseitig koppelt. Die Räuber begegnen mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit den Beutelebewesen und erhöhen so proportional zu ihrer Anzahl und proportional zu einem Kontaktparameter α die Zahl der sterbenden Beutetiere. Umgekehrt erhöhen sich die Geburten der Räuber in erster Näherung proportional abhängig vom Kontaktparameter α und der Zahl der Beutetiere.

Das so angepasste Modell ist im Feld für die Modellgleichungen in Abbildung 4 in das Programm Fluxion eingegeben und die rechten Diagramme zeigen die zeitlichen Verläufe der beiden modellierten Systemgrößen Beute-Anzahl und Räuber-Anzahl. Man erkennt u. a. das von Lotka beschriebene phasenverschobene Verhalten der Populationen. Über die Variation der Parameter lassen sich weitere Aussagen zum Modellverhalten finden. In ähnlicher Weise lässt sich auch eine

Modellierung für das Szenario zweier friedlicher Spezies, die um dieselben Ressourcen konkurrieren, aufstellen.

3.5 Ungedämpfter Elektromagnetischer Schwingkreis (Beispiel aus der Technik / Physik)

Als letztes Beispiel soll die Implementierung eines Schwingkreises, bestehend aus einer idealen Spule mit der Induktivität L und einem Kondensator mit der Kapazität C, beschrieben werden. Gesucht sind Strom- und Spannungsverlauf in Abhängigkeit von der Zeit. Mit Hilfe der Kirchhoff-Regeln findet man gemäß der Maschenregel $U_C = U_L$ mit $U_C = Q / C$ und $U_L = - L \cdot I'$. Daraus ergibt sich für die Veränderungsgröße I':

$$I' = - 1 / (L \cdot C) \cdot Q$$

Nun muss man noch Q modellieren, da sich Q ja auch systemgemäß mit der Zeit ändert (anschauliches Bild des Schwingkreises: Ladungen werden hin und her geschaufelt). Dieses ist sehr einfach, denn die Änderung der Ladung pro Zeit ist genau die Stromstärke I. Somit sind die Modellgleichungen für den Schwingkreis gefunden. Die Problemstellung forderte jedoch zudem die Ausgabe der Spannung U_C. Nachdem die Ladung Q durch die Lösung der Modellgleichungen zu jedem Zeitpunkt bekannt ist, kann die Spannung U_C gemäß $U_C = Q / C$ direkt berechnet und dann vom Programm ausgegeben werden (siehe Abbildung 5).

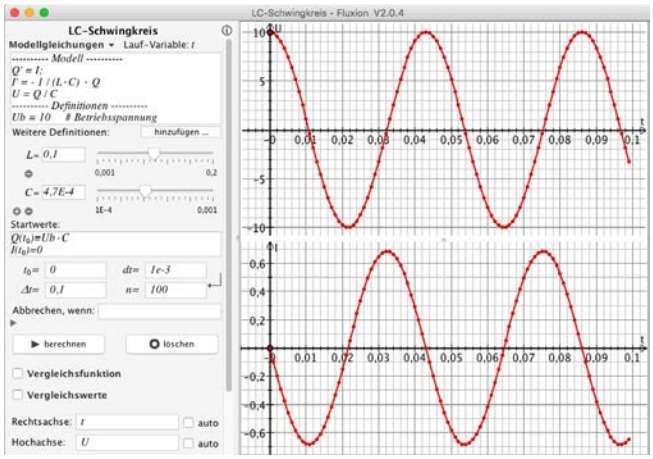


Abbildung 5: *Bildschirmfoto der Modellierung des Spannungs- und Stromverlaufs eines LC-Schwingkreises*

Insbesondere dieses Beispiel lässt sich sehr gut und sehr weitgehend erweitern und vertiefen. Ein erster Schritt wäre die Berücksichtigung des Spulenwiderstandes. Weiterhin kann man den dann gedämpften Schwingkreis extern periodisch antreiben und dieses in der Modellierung berücksichtigen. Auch ist bekannt, dass durch das Ersetzen des Kondensators mit einer Kapazitätsdiode und der dadurch spannungsabhängigen Kapazität chaotische Schwingungen entstehen können. Das Vorgehen, über die Kirchhoff'schen Gesetze die Modellgleichungen aufzustellen, kann auch auf gänzlich anders aufgebaute Schwingkreise, wie zum Beispiel den in [8] und [9] dargestellten selbstangeregten Schwingkreisen übertragen werden, wodurch sich das Verhalten dieser komplexeren Schaltungen untersuchen lässt.

4. Abschließende Hinweise und Anmerkungen

Anhand der verschiedenen Beispiele wurde illustriert, welche Überlegungen zum erfolgreichen Modellieren notwendig sind und dass die grundlegenden Begrifflichkeiten und das Procedere durchaus anhand von einfachen Beispielen bereits in den mittleren Jahrgängen von Schülern und Schülerinnen gelernt werden können. Der besondere kognitive Gewinn, Probleme derart zu behandeln, wird ausführlich in [5] dargelegt. Die hier vorgestellte Software bietet den Vorteil einer direkten Umsetzung der Überlegung mit dem Computer. Anders als bei grafischen Modellbildungsprogrammen, die auch gewisse Vorzüge haben, gibt es hier keinen Umweg in der Umsetzung. Es gibt viele weitere Beispiele und Einsatzmöglichkeiten sowohl im Schulunterricht, als auch im Grundstudium, die hier nicht aufgeführt werden konnten. Die Fluxion-Dokumente der im Artikel behandelten Modelle sowie eine wachsende Anzahl an weiteren Beispielen und auch Tutorials befinden sich auf den Webseiten der Universität Würzburg (siehe [1+7]).

AOR Dr. Stephan Lück *Lehrstuhl für Physik und ihre Didaktik, Universität Würzburg*

Literatur

[1] http://did-apps.physik.uni-wuerzburg.de/Fluxion (Das Programm ist kostenlos verwendbar.)

[2] Lück, S. & Wilhelm, T. (2011): Modellierung physikalischer Vorgänge am Computer. Modellbildungssysteme als Unterstützung zum Verständnis physikalischer Strukturen. Unterricht Physik, 22 (122), S. 26-31.

[3] Mikelskis-Seifert, S.; Kaspar, L.: Modellieren in der Physik, im Alltag und im Unterricht. Hintergründe und unterrichtliche Orientierung zum Thema Modelle. In: NiU Physik 12 (2011), Heft 122, S. 48 - 56.

[4] Schecker, H.; Klieme, E.; Niedderer, H.; Ebach, J.; Gerdes, J.: Physiklernen mit Modellbildungssystemen. Förderung physikalischer Kompetenz und systemischen Denkens durch computergestützte Modellbildungssysteme. Abschlussbericht zum DFG-Projekt. Bremen/ Berlin: Institut für Didaktik der Physik an der Universität Bremen/Max-Planck-Institut für Bildungsforschung Berlin, 1999.

[5] Orth, J.: Tutorial zu Fluxion, http://did-apps.physik.uni-wuerzburg.de/Download/Tutorial_Fluxion_Orth.zip

[6] Fluxion-Dokumente der beschriebenen Beispiele: http://did-apps.physik.uni-wuerzburg.de/Download/PlusLucis_ModellierenMitFluxion.zip

[7] Murray, J. D.: Mathematical Biology I: An Introduction. 3. Auflage. Springer, 2008, S. 79

[8] Shinriki, M.; Yamamoto, M.; Mori, S.: Multimode Oscillations in a Modified Van-der-Pol Oscillator Containing a Positive Nonlinear Conductance, Proc. IEEE 69 (1981) 394

[9] Tamaševicius, A.; Mykolaitis, G.; Pyragas V.; Pyragas, K.: A simple chaotic oscillator for educational purposes, Eur. J. Phys. 26 (2005), S. 61–63